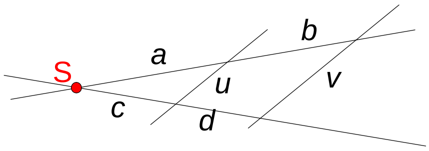
1

Formuliere die Strahlensätze anhand der Figur:



Strahlensätze:

Werden zwei Strahlen mit einem gemeinsamen Punkt *S* von zwei Parallelen geschnitten, dann gilt:

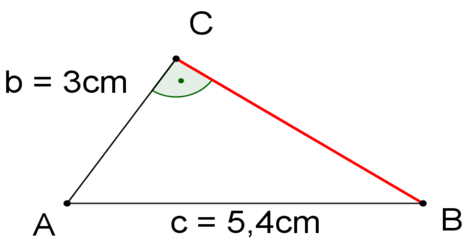
1. Strahlensatz:

$$\boxed{\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}}$$

2. Strahlensatz: $\boxed{\frac{u}{a}=\frac{v}{a+b}}$

2

Berechne *a* und formuliere den Satz, der dafür benötigt wird.



$$a=\sqrt{5{,}4^2-3^2}\,cm=\sqrt{20{,}16}\,cm\approx 4{,}49\,cm$$

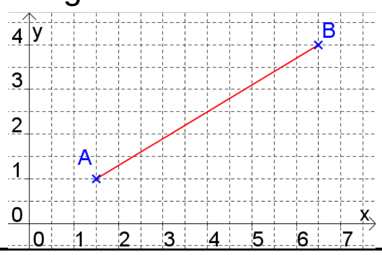
Satz des Pythagoras:

Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck c die Hypotenuse ist und a und b die Katheten sind, dann gilt:

$$\boxed{a^2+b^2=c^2\ \rightarrow\ a=\sqrt{c^2-b^2}}$$

3

Berechne die Länge von $\overline{AB}$.
Verallgemeinere die Lösung.



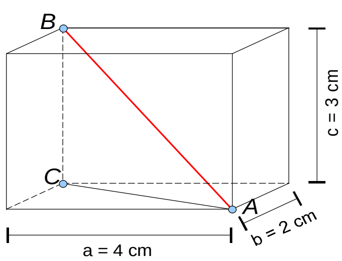
$$A(1{,}5|1);B(6{,}5|4)$$
$$\overline{AB}=\sqrt{(6{,}5-1{,}5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{34}$$

Allgemein:

$$A(x_A|y_A);B(x_B|y_B)$$
$$\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

4

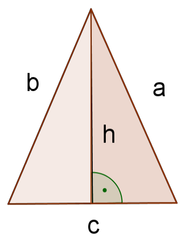
Berechne im Quader die Länge der Raumdiagonalen $\overline{AB}$.



$$\overline{AC}=\sqrt{2^2+4^2}\,cm=\sqrt{20}\,cm\approx 4{,}47\,cm$$
$$\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{20})^2+3^2}\,cm=\sqrt{20+9}\,cm$$
$$\approx 5{,}39\,cm$$

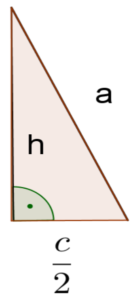
5

Berechne im gleichschenkligen Dreieck mit der Basis *c* die Höhe *h*.



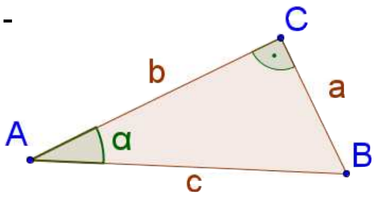
$a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$ (Pythagoras)

$\rightarrow \quad h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$



6

Wie sind **sin α**, **cos α** und **tan α** am rechtwinkligen Dreieck definiert? Verwende die entsprechenden Seitenbezeich-nungen.



$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{GK}}{\text{Hyp}}$

$\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{AK}}{\text{Hyp}}$

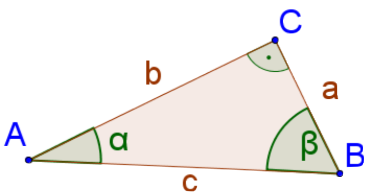
$\tan\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha} = \frac{\text{GK}}{\text{AK}}$

7

Im rechtwinkligen Dreieck *ABC* gilt:

$a = 2{,}2\,cm$ und $b = 4\,cm$.

Berechne alle fehlenden Winkel und Seiten.



$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2{,}2}{4} = 0{,}55 \;\rightarrow\; \alpha \approx 28{,}8°\,(TR)$

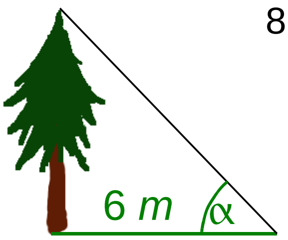
$\beta = \gamma - \alpha = 90° - 28{,}8° = 61{,}2°$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \;\rightarrow\; c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{2{,}2\,cm}{\sin 28{,}8°} \approx 4{,}57\,cm$

Alternativ:

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2{,}2^2 + 16\,cm} \approx 4{,}57\,cm$

8



Wie hoch ist der Baum, wenn $\alpha = 47{,}8°$ beträgt?

$\tan 47{,}8° = \frac{h}{6m}$

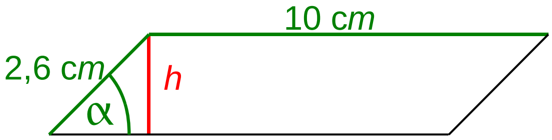
$\rightarrow \quad h = 6\,m \cdot \tan 47{,}8° \approx 6{,}62\,m$

Hinweis:

$\tan 45° = 1 \;\rightarrow\; \tan 47{,}8° > 1$

9

Parallelogramm



Wie groß ist die Parallelogrammfläche, wenn $\alpha = 40°$ beträgt?

$$\sin 40° = \frac{GK}{Hyp} = \frac{h}{2{,}6\,cm}$$

$\rightarrow$

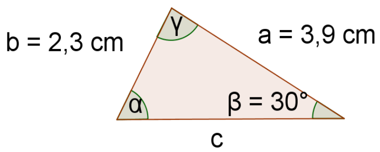
$$h = 2{,}6\,cm \cdot \sin 40° \approx 1{,}67\,cm$$

$$A_{Parallelogramm} = g \cdot h$$

$$= 10\text{cm} \cdot 1{,}67\,cm = \mathbf{16{,}7\,cm^2}$$

10

Berechnungen in irgendeinem Dreieck (Eine Seite und der gegenüberliegende Winkel sind bekannt, die dritte Größe ist beliebig.) Berechne c, α und γ.



Es gilt der **Sinussatz**:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Hier gilt: $\dfrac{\sin(\alpha)}{3{,}9\,cm} = \dfrac{\sin(30°)}{2{,}3\,cm} \Rightarrow \alpha \approx 58°$

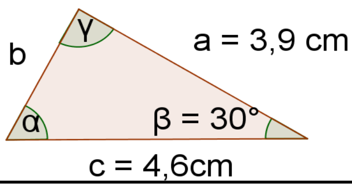
$$\gamma = 180° - 30° - 58° = 92°$$

$$\frac{c}{\sin(92°)} = \frac{2{,}3\,cm}{\sin(30°)} \Rightarrow c \approx 4{,}6\,cm$$

11

Berechnungen in irgendeinem Dreieck (Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel oder drei Seiten sind bekannt.)

Berechne b, α und γ.



Es gilt der **Kosinussatz**:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

Hier gilt:

$$b^2 = (3{,}9\,cm)^2 + (4{,}6\,cm)^2 \ldots$$

$$\ldots - 2 \cdot 3{,}9\,cm \cdot 4{,}6\,cm \cdot \cos(30°) \Rightarrow b \approx 2{,}3\,cm$$

$$(3{,}9\,cm)^2 = (2{,}3\,cm)^2 + (4{,}6\,cm)^2 \ldots$$

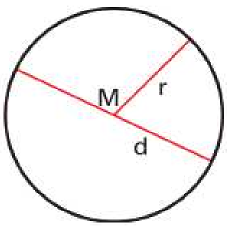
$$\ldots - 2 \cdot 2{,}3\,cm \cdot 4{,}6\,cm \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \alpha \approx 58°$$

$$\Rightarrow \gamma \approx 180° - 30° - 58° = 92°$$

12

Kreis

Berechne für einen Kreis mit Umfang 5 cm den Radius und den Flächeninhalt.



Umfang:

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow r = \frac{u}{2 \cdot \pi}$$

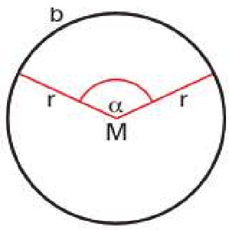
$$r = \frac{5\,cm}{2 \cdot \pi} \approx 0{,}796\,cm \qquad d = 2 \cdot r = 1{,}59\,cm$$

Flächeninhalt:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0{,}8\,cm)^2 \approx 2{,}01\,cm^2$$

13 Kreissektor

Der Flächeninhalt eines Kreissektors mit dem Radius 10 cm ist 20 cm². Bestimme seinen Innenwinkel.



Flächeninhalt des Kreissektors:

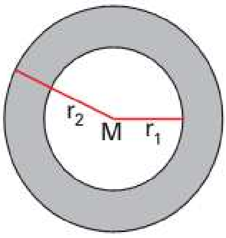
$$A=\frac{\pi\cdot r^2\alpha}{360°}\Rightarrow\alpha=\frac{A\cdot 360°}{\pi\cdot r^2}\approx 22{,}9°$$

Bogenlänge:

$$b=\frac{2\cdot\pi\cdot r\cdot\alpha}{360°}=4\,cm\quad oder\quad b=\frac{(2\cdot A)}{r}=4\,cm$$

14 Kreisring

Erläutere den Zusammenhang der Flächeninhalte von kleinem Kreis (r_1), großem Kreis (r_2) und dem Kreisring.



Flächeninhalte werden durch Zerlegung einer Fläche in bekannte Teilflächen und der Addition oder Subtraktion der berechenbaren Teilflächen bestimmt.

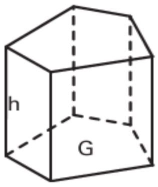
Hier gilt:

$$A_{Kreisring}=A_2-A_1=\pi\cdot r_2^2-\pi\cdot r_1^2$$
$$=\pi\cdot(r_2^2-r_1^2)$$

15 Prisma

Welcher Körper heißt Prisma?

Gib die wichtigsten Berechnungsformeln an.



G: Grundfläche(-ninhalt)
h: Höhe, u: Umfang der Grundfläche

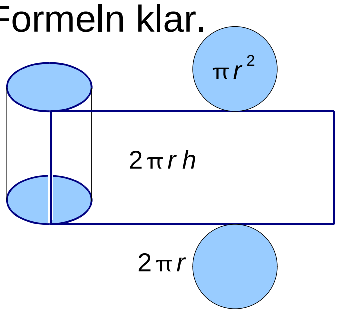
Ein Körper, dessen Deckfläche und Grundfläche G kongruente Vielecke sind, heißt Prisma. Seine Seitenflächen sind dann Rechtecke.
Beispiele: Quader oder siehe links

Volumen: $V=G\cdot h$

Oberflächeninhalt: $O=2G+M=2G+u\cdot h$

16

Mache dir die Formeln klar. Welches Volumen und welche Oberfläche hat der Zylinder?



Kreisfläche: $A_{Kreis}=\pi\cdot r^2$

Der abgewickelte Mantel ist ein Rechteck mit den Seiten $u=2\pi r$ und h → ***Mantelfläche***: $M=2\pi r h$

Oberfläche:

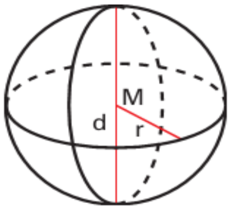
$$O=2\pi r h+2\pi r^2=2\pi r\cdot(h+r)$$

Volumen: $V=\pi r^2\cdot h$

17

Kugel

Berechne die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit dem Radius 4 cm.



Volumen:

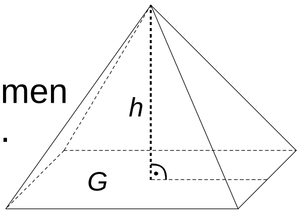
$$V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(4\text{cm})^3\approx 268\,cm^3$$

Oberflächeninhalt:

$$O=4\cdot\pi\cdot r^2=4\cdot\pi\cdot(4\text{cm})^2\approx 201\,cm^2$$

18

Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a=4\,cm$.
Die Höhe beträgt $h=6\,cm.$
Berechne das Volumen und die Oberfläche.



Volumen : $V=\frac{1}{3}G\,h=\frac{1}{3}a^2h=32\,cm^3$

Höhe eines Außendreiecks:

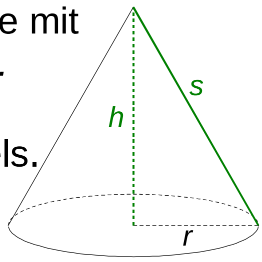
$$h_1=\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=2\cdot\sqrt{10}\,cm\approx 6{,}3\,cm$$

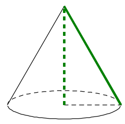
Oberflächeninhalt:

$$O=a^2+4\cdot\left(\frac{1}{2}a\,h_1\right)\approx 66{,}6\,cm^2$$

19

Der Kegel hat die Höhe $h=4\,cm$ und eine Mantellinie mit der Länge $s=5\,cm.$
Berechne das Volumen des Kegels.





Radius:

$$r=\sqrt{25-16}\,cm=3\,cm$$

Volumen:

$$V=\frac{1}{3}\pi\,r^2h\approx 37{,}7\,cm^3$$

20

Einheitenumrechnungen

5m = _____ dm

5 m² = _______ dm²

5 m³ = ________ dm³

Länge mit Faktor 10

5m = 50 dm

Flächeninhalt mit Faktor 100

5 m² = 500 dm²

Volumina mit Faktor 1000

5 m³ = 5000 dm³

($(1\,l=1\,dm^3)$)

21 binomische Formeln Berechne mithilfe der binomischen Formeln: $a)\ (x+4)^2=\ldots$ $b)\ (2a-3b)^2=\ldots$ $c)\ (y+2)\cdot(y-2)=\ldots$ $d)\ (4x+2y)\cdot(4x-2y)=\ldots$ $e)\ x^2+6x+9=\ldots$ $f)\ 4a^2-9b^2=\ldots$ $g)\ 25x^2-40xy+16y^2=\ldots$	$a)\ (x+4)^2=x^2+8x+16$ $b)\ (2a-3b)^2=4a^2-12ab+9b^2$ $c)\ (y+2)\cdot(y-2)=y^2-4$ $d)\ (4x+2y)\cdot(4x-2y)=16x^2-4y^2$ $e)\ x^2+6x+9=(x+3)^2$ $f)\ 4a^2-9b^2=(2a+3b)\cdot(2a-3b)$ $g)\ 25x^2-40xy+16y^2=(5x-4y)^2$
22 Schreibe als Dezimalzahl: a) 10^{-2} b) $3{,}4\cdot10^{-3}$ c) $12{,}3\cdot10^4$ d) $0{,}25\cdot10^{-2}$	a) $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=\mathbf{0{,}01}$ b) $3{,}4\cdot10^{-3}=3{,}4\cdot0{,}001=\mathbf{0{,}0034}$ c) $12{,}3\cdot10^4=1{,}23\cdot10^5=\mathbf{123000}$ d) $0{,}25\cdot10^{-2}=2{,}5\cdot10^{-3}=\mathbf{0{,}0025}$
23 Ergänze die Potenzgesetze: a) $a^p\cdot a^q=$ e) $a^p:a^q=$ b) $a^p\cdot b^p=$ f) $a^p:b^p=$ c) $(a^p)^q=$ g) $a^0=$ d) $a^p\cdot b^q=$ h) $a^1=$	a) $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$ e) $a^p:a^q=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$ b) $a^p\cdot b^p=(a\cdot b)^p$ f) $a^p:b^p=(a:b)^p$ c) $(a^p)^q=a^{p\cdot q}$ g) $a^0=1$ d) $a^p\cdot b^q$ geht i. a. nicht weiter! h) $a^1=a$
24 Vereinfache: a) $a^3\cdot a^{-2}$ b) $b^6:b^4$ c) $(x^{-3})^4$ d) $x^8:x^{-5}$ e) $(-a^2)^{-3}$ f) $3a^3\cdot5a^{-6}$ g) $\frac{x^4y^{-3}z^2}{z^2y^3x^{-4}}$ h) $(a^3\cdot b^4)^3$ i) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}:\left(\frac{x}{2y}\right)^{-2}$	a) a b) b^2 c) x^{-12} d) x^{13} e) $\frac{1}{(-a^2)\cdot(-a^2)\cdot(-a^2)}=-a^{-6}$ f) $15a^{-3}$ g) x^8y^{-6} h) $a^9\cdot b^{12}$ i) $\left(\frac{y}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{2y}\right)^2=\left(\frac{y\cdot x}{x\cdot 2y}\right)^2=\frac{1}{4}$

25 Ergänze: Die ***Quadratwurzel*** $\sqrt{a}$ aus der ***nichtnegativen Zahl a*** ist diejenige ...	Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ aus der nichtnegativen Zahl a ist diejenige ***nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt.*** (= ***Definition der Quadratwurzel***) Kurz: $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ Es gilt also immer $\sqrt{a}\geq 0$ mit $a\geq 0$.
26 Was versteht man unter $a^{\frac{1}{n}}$? Für welche Werte von a ist dieser Ausdruck nur sinnvoll?	Schreibweise: $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ Die ***n-te Wurzel von a***, $a^{\frac{1}{n}}$, ist diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$ Sinnvoll nur für $a\geq 0, n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 1$
27 Für welche Werte von a, p und q ist der Ausdruck $a^{\frac{p}{q}}$ definiert?	$a^{\frac{p}{q}}=\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ Sinnvoll nur für $a\geq 0$, wobei $q\neq 0$ p und q sind dabei natürliche Zahlen.
28 Vereinfache: a) $100^{\frac{3}{2}}$ b) $9^{-\frac{1}{2}}$ c) $5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$ d) $\sqrt[8]{16^2}$ e) $\sqrt[4]{a^6}\cdot\sqrt{a^5}$ f) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^9$ g) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^{-2}$	a) $\sqrt{100^3}=10^3=1000$ b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$ c) $5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=5^{\frac{7}{6}}$ d) $2^{\frac{4\cdot 2}{8}}=2$ e) $a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{5}{2}}=a^4$ f) $2^{\frac{9}{3}}=2^3=8$ g) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$

29

Was versteht man unter dem Ausdruck $\log_a(b)$?

Bestimme $3^{\log_3(7)}$

Wenn die Basis 10 ist, dann schreibt man log b.

$\log_a(b)$ ist der ***Logarithmus von b zur Basis a***.

Das ist die (Hoch-)Zahl, die für x eingesetzt bei a^x den Wert b ergibt.

$\log_3(7)$ ist die Zahl, die für x bei 3^x den Wert 7 ergibt. Somit ist (trivialerweise) $3^{\log_3(7)}=7$.

30

Löse die Gleichungen:

a) $3^x=81$

b) $3\cdot 5^x=27$

c) $2\cdot 10^{2x+1}=4$

d) $6\cdot 2^x+7=2^x+12$

a) $x=\log_3(81)=4$

b) $5^x=9 \quad \rightarrow x=\log_5(9)=\frac{\log(9)}{\log(5)}\approx 1{,}37$

c) $10^{2x+1}=2 \quad \rightarrow 2x+1=\log(2)$

$\rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot(\log 2-1)\approx -0{,}35$

d) $5\cdot 2^x=5 \quad \rightarrow 2^x=1 \quad \rightarrow x=0$

31

Lineares Gleichungssystem

Löse folgende lineare Gleichungssysteme mit einem geeigneten Lösungsverfahren.

a)
$$y=5x-2$$
$$y=16-x$$

b)
$$12x+y=48$$
$$y=28-2x$$

a)
$$5x-2=16-x$$
$$6x=18$$
$$x=3$$
$$\Rightarrow y=13$$

b)
$$12x+(28-2x)=48$$
$$10x=20$$
$$x=2$$
$$\Rightarrow y=48-12\cdot 2=24$$

Es sind verschiedene Verfahren möglich. Hier wurde verwendet:

a) Gleichsetzungsverfahren und

b) Einsetzungsverfahren

32

Löse das folgende ***lineare Gleichungssystem*** mit dem ***Additionsverfahren***:

$$2x+3y=4$$
$$3x+4y=5$$

Man multipliziert beide Gleichungen geschickt, so dass beim Addieren der Gleichungen eine Unbekannte herausfällt:

I: $2x+3y=4 \quad |\cdot 3$

II: $3x+4y=5 \quad |\cdot(-2)$

NR:

$3\cdot$I: $6x+9y=12$

$+(-2)\cdot$II: $-6x-8y=-10$

$0 + y = 2$

$\mathbf{y=2}$ eingesetzt in I. oder II. liefert $\mathbf{x=-1}$.

$\rightarrow$ Lösungsmenge: $\mathbf{L=\{(-1|2)\}}$

33 Erkläre die Begriffe Bruchgleichung, Definitionsmenge und Lösungsmenge einer Bruchgleichung. Löse die Bruchgleichungen a) $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x+1}$ b) $\frac{x+10}{x+30}=\frac{x-7}{x+3}$ c) $\frac{x+1}{x-2}-3=\frac{5-x}{x-2}$	Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung mit Variable im Nenner. Die Definitionsmenge enthält alle Zahlen, die man einsetzen darf (kein Nenner darf Null sein). Die Lösungsmenge enthält alle Zahlen, die aus der Gleichung eine wahre Aussage machen. a) L = { 1 } b) L = { 24 } c) L = Ø, da eine Rechnung auf x = 2 führt, was nicht in der Definitionsmenge liegt.
34 Erkläre die Begriffe Wurzelgleichung, Definitionsmenge und Lösungsmenge einer Wurzelgleichung. Erkläre die Problematik beim Quadrieren einer Wurzelgleichung. Erkläre die Bedeutung der Probe bei einer Wurzelgleichung.	Eine Wurzelgleichung enthält mindestens einen Wurzel-Term, in dem eine Variable vorhanden ist. Die Definitionsmenge enthält alle Zahlen, die man einsetzen darf (kein Radikand darf negativ sein). Die Lösungsmenge enthält alle Zahlen, die aus der Gleichung eine wahre Aussage machen. Beim Quadrieren einer Wurzelgleichung kann sich die Lösungsmenge vergrößern. *Quadrieren* ist *keine Äquivalenzumformung*. Daher ist zum Schluss der Rechnung eine Probe immer <u>unbedingt nötig</u>!
35 Löse die Wurzelgleichungen a) $\sqrt{8x-12}=10$ b) $\sqrt{x+2}=4-x$ c) $\sqrt{7x+8}-\sqrt{5x-4}=2$ d) $\sqrt{x-5}=\sqrt{3-x}$	**Lösungen und Hinweise** a) Durch Quadrieren ergibt sich L = { 14 }. b) Durch Quadrieren ergeben sich die Zahlen 2 und 7. Nur 2 erfüllt die Gleichung. L = { 2 }. c) Man isoliert zunächst eine Wurzel.Dann muss man quadrieren. Dann isoliert man die andere Wurzel. Dann quadriert man wieder. L = { 4 ; 8 }. d) Quadrieren liefert die Zahl 4. 4 ist nicht in der Definitionsmenge. L = Ø.
36 Funktionsbestimmung aus zwei Punkten: (lineare Funktion) a) Berechne die Funktionsgleichung aus den gegebenen Punkten: $x_1 = 0$, $f(x_1) = 5$, $x_2 = 4$, $f(x_2) = 11$ b) Berechne die Funktionsgleichung aus den gegebenen Punkten: $x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$, $x_2 = 6$, $f(x_2) = 17$	a) $b=f(0)=5$ $m=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(11-5)}{(4-0)}=1{,}5$ $\Rightarrow f(x)=1{,}5\cdot x+5$ b) Es gilt: $f(x)=m\cdot(x-x_1)+f(x_1)$ $m=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(17-5)}{(6-2)}=3$ $\Rightarrow f(x)=3\cdot(x-2)+5=3\cdot x-1$

37

Wie entsteht das ***Schaubild der quadratischen Funktion f*** mit

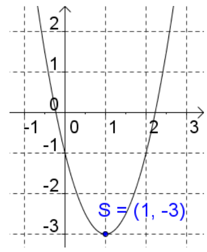
$$y=2\cdot(x-1)^2-3$$

aus der Normalparabel.

Skizziere das Schaubild und gib den Scheitel an.

Die Normalparabel wird

- mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt,
- um +1 in x-Richtung und
- um -3 in y-Richtung verschoben.



→ ***Scheitel:*** $\boldsymbol{S(1|-3)}$

38

Die ***quadratische Funktion f*** ist durch eine Gleichung in ***Normalform*** gegeben:

$$f(x)=-2x^2+4x-5$$

Bestimme die zugehörige ***Scheitelform*** und gib den ***Scheitel*** an.

Verschiebe die Parabel um 5 nach oben (*x*-Wert des Scheitels ändert sich nicht):

$$y=-2x^2+4x=-2x(x-2)$$

→ Nullstellen: $x_1=0$ und $x_2=2$

→ *x*-Wert des Scheitels: $x_S=1$

→ mit $f(x_S)=y_S$ folgt $y_S=-2+4-5=-3$

→ ***Scheitel:*** $\boldsymbol{S(1|-3)}$

→ ***Scheitelform:*** $\boldsymbol{f(x)=-2(x-1)^2-3}$

39

Welche „***Vorarbeit***“ ist für die Anwendung der ***p-q-Formel für quadratische Gleichungen*** zu leisten?

Wie lautet sie?

Beschreibe die Zahlen der Formel in Worten.

Zunächst muss die quadratische Gleichung so umgeformt werden, dass

a) auf einer Seite der Gleichung 0 steht

b) vor dem x^2 der Faktor 1 steht.

→ ***Gleichung:*** $x^2+px+q=0$

p-q-Formel: $\boldsymbol{x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$

Die Hälfte der Gegenzahl von p

Das Quadrat dieser Zahl (immer positiv)

Die Gegenzahl von q

40

Löse die Gleichungen:

a) $x^2-2x-3=0$

b) $x^2-4x+1=0$

c) $3x^2+18x+15=0$

d) $3x^2+12x=0$

p-q-Formel: $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

a) $x^2-2x-3=0$ $\quad x_1=-1;\ x_2=3$

b) $x^2-4x+1=0$ $\quad x_{1/2}=2\pm\sqrt{3}$

c) $3x^2+18x+15=0$ $\quad x_1=-5;\ x_2=-1$

d) $3x^2+12x=0$ $\quad x_1=-4;\ x_2=0$

Tipp zu d):

Wenn der „***Summand ohne x***“ fehlt:

→ ***Ausklammern erspart die Formel!***

41

Bestimme - wenn möglich - die exakten Lösungen:

a) $x^2=9$ b) $x^4=0$ c) $x^4=10$
d) $x^6=-1$ e) $x^3=21$ f) $x^3=-27$
g) $x^{\frac{2}{3}}=2$ h) $\sqrt{x^5}=4$ i) $x^{-2}=16$
j) $x^{-3}=\frac{-1}{27}$ k) $x^{-\frac{1}{2}}=3$

a) $x_{1/2}=\pm 3$ b) $x=0$
c) $x_{1/2}=\pm\sqrt[4]{10}$ d) keine Lösung
e) $x=\sqrt[3]{21}$ f) $x=-\sqrt[3]{27}=-3$
g) $x=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
h) $x^5=4^2=2^4 \rightarrow x=2^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{16}$
i) $x=\frac{1}{4}$ j) $x=-3$ k) $x=\frac{1}{9}$

42

Was versteht man unter einer Nullstelle x_N einer Funktion?

Wie ermittelt man Nullstellen rechnerisch?

Anschaulich ist x_N die x-Koordinate eines Schnittpunktes des Funktionsgraphen mit der x-Achse.
Eine Nullstelle x_N einer Funktion ist eine Zahl (ein x-Wert), für den $f(x_N)=0$ gilt.

Die rechnerische Ermittlung einer Nullstelle bedeutet die Lösung der Gleichung $f(x_N)=0$.

43

Erkläre den Begriff „Faktorisieren“. Nenne sinnvolle Rechenschritte für das Faktorisieren.
Erkläre den Zusammenhang zwischen dem Faktorisieren und Nullstellen.
Ermittle die Nullstellen von

a) $f(x)=x^3-4x^2$
b) $g(x)=x^2-12x+36$
c) $h(x)=x^2\cdot 3^x+45x\cdot 3^{(x-2)}$

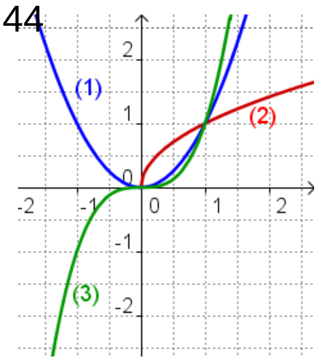
„Faktorisieren“ bedeutet die Umwandlung eines Summenterms in einen Produktterm.
Wichtige Rechenschritte für das Faktorisieren sind das Ausklammern und die Anwendung der Binomischen Formeln. Nullstellen findet man durch Faktorisieren, da ein Produkt genau dann den Wert Null hat, wenn einer der Faktoren Null ist. Lösungen:

a) $f(x)=x^2\cdot(x-4)\Rightarrow$ L = { 0; 4 }
b) $g(x)=(x-6)^2\Rightarrow$ L = { + 6 }
c) $h(x)=(x+45\cdot 3^{-2})\cdot x\cdot 3^x\Rightarrow$ L = { 0; - 5 }. Der ausgeklammerte Faktor 3^x kann nicht Null sein.

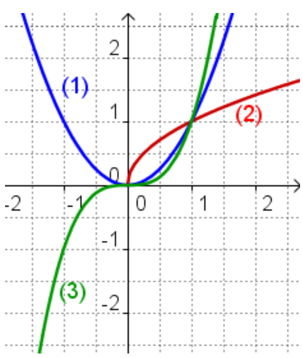
44

Ordne die Graphen zu:

a) $y=x^3$
b) $y=-x^2$
c) $y=x^2$
d) $y=x^{\frac{1}{2}}$



(1) gehört zu c)
(2) gehört zu d)
(3) gehört zu a)



45

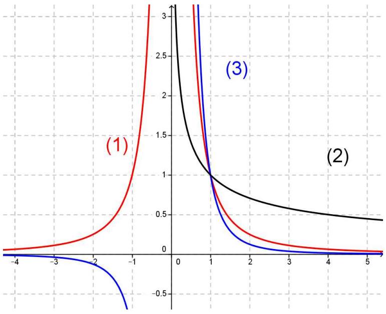
Ordne die Graphen zu:

$f(x)=x^{0,5}$

$f(x)=x^{-0,5}$

$f(x)=x^{-2}$

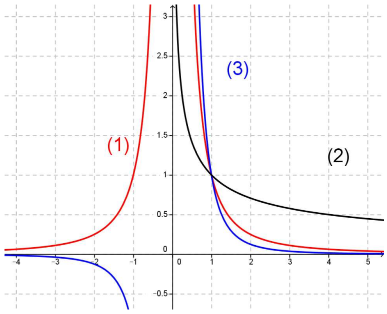
$f(x)=x^{-3}$



$(1)\ x^{-2}$

$(2)\ x^{-0,5}$

$(3)\ x^{-3}$



46
Exponentialfunktionen

Bestimme aus der Wertetabelle eine Exponentialfunktion der Form $f(x)=a\cdot b^x$

x	0	1	2
f(x)	2,5	3,75	5,625

$f(0)=2,5 \Rightarrow a=2,5$

$f(1)=3,75 \Rightarrow 2,5\cdot b^1=3,75 \Rightarrow b^1=b=1,5$

Es ergibt sich: $f(x)=2,5\cdot 1,5^x$

Kontrolle: $f(2)=2,5\cdot 1,5^2=5,625 \Rightarrow$ stimmt!

47
Exponentialfunktionen

Nenne die Eigenschaften der Exponentialfunktionen der Form $f(x)=b^x$ und der Form $f(x)=a\cdot b^x$.

Mit welchen Begriffen bezeichnet man die Parameter a und b?

$f(x)=b^x$ *mit* $b\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$:

Für b > 1 ist f streng monoton wachsend, für 0 < b < 1 ist f streng monoton fallend.

Der Wertebereich von f ist $\mathbb{R}^+$.

Der Graph schneidet die y-Achse bei 1. Die x-Achse ist Asymptote des Graphen von f.

$f(x)=a\cdot b^x$ *mit* $a\in\mathbb{R}^+$, $b\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$:

Das ist die allgemeine Exponentialfunktion zur Basis b (Wachstumsfaktor). $b-1$ ist der prozentuale Zuwachs pro Einheit. Der Graph schneidet die y-Achse beim Wert a (Anfangswert).

48

Herr Schatz möchte 1.000 € zu 5,2% für 6 Jahre anlegen. Wie groß ist das Guthaben nach 6 Jahren?

Exponentielles Wachstum:

$$B(n)=B(0)\cdot a^n$$

Wachstumsfaktor: $a=1+p\%$

Geg.: $B(0)=1000; a=1,052; n=6$

Ges.: $B(6)$

$$B(6)=1000\cdot 1,052^6=1.355,48$$

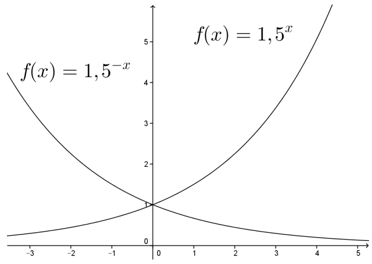
Das Guthaben nach 6 Jahren beträgt 1.355,48 €.

49

Exp.funk. mit neg. Exponenten

Zeichne die Graphen von $f(x)=1{,}5^{x}$ und $f(x)=1{,}5^{-x}$.
Beschreibe, wie ein solcher Graph zu $f(x)=b^{-x}$ aus dem Graphen zur Funktion $f(x)=b^{x}$ hervorgeht und nenne seine Eigenschaften!

Der Graph der Exponential-funktion von $f(x)=b^{-x}$ geht aus dem Graphen von $f(x)=b^{x}$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor.



50

Funktionsbestimmung aus zwei Punkten: (Exponentialfunktion)

a) Berechne die Funktionsgleichung aus den gegebenen Punkten:
$x_1 = 0$, $f(x_1) = 5$, $x_2 = 4$, $f(x_2) = 11$
b) Berechne die Funktionsgleichung aus den gegebenen Punkten:
$x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$, $x_2 = 6$, $f(x_2) = 17$

a)
$a=f(0)=5$
$f(x_2)=a\cdot b^{x_2} \Rightarrow b=\sqrt[x_2]{f(x_2)/a} \Rightarrow b\approx 1{,}217$
$\Rightarrow f(x)=5\cdot 1{,}217^{x}$
b)
$b=\sqrt[(x_2-x_1)]{f(x_2)/f(x_1)}=\sqrt[(6-2)]{17/5} \Rightarrow b\approx 1{,}358$
$f(x_1)=a\cdot 1{,}358^{x_1} \Rightarrow a\approx 2{,}711$
$f(x)=2{,}711\cdot 1{,}358^{x}$

51

Nenne ***drei Interpretationen der ersten Ableitung*** an der Stelle x_0.

1.) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Definition von f' als ***Grenzwert des Differenzenquotienten***.
2.) $f'(x_0)$ beschreibt die ***Steigung des Schaubildes von f*** an der Stelle x_0
3.) $f'(x_0)$ beschreibt die ***lokale (momentane) Änderungsrate der Funktion f*** an der Stelle x_0.

52

Bestimme jeweils die ***Ableitungsfunktion f'***:
a) $f(x)=3x^4-5x^7$
b) $f(x)=2x^{-2}+\frac{8}{x}$
c) $f(x)=-\frac{1}{2x^2}+\sqrt{x}$

a) $f'(x)=12x^3-35x^6$
b) $f'(x)=-4x^{-3}-\frac{8}{x^2}$; da $8x^{-1}=\frac{8}{x}$
c) $f'(x)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; da $-\frac{1}{2}x^{-2}=-\frac{1}{2x^2}$
und $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ bzw. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

53 Bestimme die ***Gleichung der Tangenten*** im Punkt $P(-3 \mid f(-3))$ an den Graphen von f mit $f(x)=2x^2-x$	Eine Verschiebung der Ursprungsgeraden mit der Steigung $m=f'(x_P)$ um x_P in x-Richtung und y_P in y-Richtung liefert die Tangente: $f'(x)=4x-1 \rightarrow f'(-3)=-13$ $f(-3)=21$ $\rightarrow \quad t: y=-13(x+3)+21$ (ausmultipliziert $t: y=-13x-18$)

54 Bestimme den ***Tiefpunkt*** des Graphen von *f*: $f(x)=3x^3-4x+1$. Bestimme ihn mit Hilfe des Vorzeichenwechsels bei der Ableitung.	$f'(x)=9x^2-4 \overset{!}{=} 0 \rightarrow x=\pm\frac{2}{3}$ Testwerte nahe $\frac{2}{3}$ ergeben einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$. $\rightarrow$ bei $x=\frac{2}{3}$ liegt der Tiefpunkt ***T***. $\rightarrow \quad T\left(\frac{2}{3} \middle| f\left(\frac{2}{3}\right)\right) \rightarrow T\left(\frac{2}{3} \middle| -\frac{7}{9}\right)$

55 Formuliere die **Potenzregel** für Ableitungen: Gegeben ist $f(x)=k \cdot x^n$ Welcher Term ergibt sich dann für **f´(x)**? Welche Werte darf der Exponent n annehmen?	Der richtige Term für f´(x) lautet $f'(x)=n \cdot k \cdot x^{n-1}$ Hierbei darf n alle ganzzahligen Werte annehmen, insbesondere auch negative. Auch der Wert 0.5 ist erlaubt; dann handelt es sich um einen Wurzel-Term.

56 Gegeben sind zwei Funktionen mit den Termen **g(x)** und **h(x)** sowie die Zahl **k.** Vervollständige die Formeln a) $[k \cdot g(x)]' = \ldots$ b) $[g(x)+h(x)]' = \ldots$	a) Ein konstanter Faktor wird beim Ableiten nicht verändert. $[k \cdot g(x)]' = k \cdot g'(x)$ b) Zwei Summanden werden einzeln abgeleitet. $[g(x)+h(x)]' = g'(x)+h'(x)$

57 Bestimme mit Hilfe der ersten beiden Ableitungen **Hoch- und Tiefpunkte** der folgenden Funktion, falls diese existieren: $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$	Es ist $f'(x)=3x^2-12x+9$ und $f''(x)=6x-12$ $f'(x)$ hat die Nullstellen 1 und 3 . Dort können Hoch- und Tiefpunkte vorliegen. Es ist f´´(1) = - 6 < 0; daher liegt an der Stelle 1 ein HP vor. Es ist f´´(x) = 6 > 0; daher liegt an der Stelle 3 ein TP vor. HP(1 | 2) und TP(3 | - 2).

58 Ableitungsregeln 1 Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen und gib die Ableitungsregel(n) an, die Du benutzt: $a)\ f(x)=x^3$ $b)\ f(x)=x^2+x$ $c)\ f(x)=4x^2-6x$ $d)\ f(x)=\frac{1}{2}x+1$	$a)\ f'(x)=3x^2\ (Potenzregel)$ $b)\ f'(x)=2x+1$ $(Potenz-und\ Summenregel)$ $c)\ f'(x)=8x-6$ $(Potenz-, Faktor-und\ Summenregel)$ $d)\ f'(x)=\frac{1}{2}\ (Faktor-und\ Summenregel)$

59 Ableitungsregeln 2 Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen und gib die Ableitungsregel(n) an, die Du benutzt: $e)\ f(x)=\frac{1}{x^3+1}$ $f)\ f(x)=(x^3+2x)^2$ $g)\ f(x)=3\sqrt{x}$ $h)\ f(x)=x^2\cdot\sin(x)$	$e)\ f'(x)=\frac{-3x^2}{(x^3+1)^2}\ (Quotientenregel)$ $f)\ f'(x)=2(x^3+2x)(3x^2+2)\ (Kettenregel)$ $g)\ f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}\ (Faktor-und\ Potenzregel)$ $h)\ f'(x)=2x\cdot\sin(x)+x^2\cdot\cos(x)$ $(Potenz-und\ Produktregel)$

60 Ein Reißnagel wird 1500 mal geworfen. Dabei fällt er 885 mal auf den Kopf. Wie groß ist die ***relative Häufigkeit*** dafür? Was versteht man allgemein unter der ***relativen Häufigkeit h***?	***Absolute Häufigkeit:*** 885 Der Anteil an den 1500 Würfen ist die ***relative Häufigkeit:*** $\frac{885}{1500}=0{,}59=\mathbf{59\%}$ ***Allgemein:*** $h=\frac{\text{Anzahl der günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl aller Versuche}}$

61 Jemand sagt: Bei einem Würfelwurf beträgt die ***Wahrscheinlichkeit*** für eine Eins oder Sechs $\frac{1}{3}$. Was versteht man darunter?	Wenn man sehr oft würfelt, so erwartet man, dass der ***Anteil*** der Würfe mit einer Eins oder Sechs $\frac{1}{3}$ beträgt.
62 Fakultät Die Fakultät ist in der Mathematik eine Funktion, die einer natürlichen Zahl das Produkt aller natürlichen Zahlen kleiner und gleich dieser Zahl zuordnet. Sie wird mit einem der Zahl nachgestellten Ausrufezeichen („!“) abgekürzt. *Beispiel:* Bei einem Autorennen starten sechs Fahrer. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge beim Zieleinlauf dieser Fahrer, wenn alle Fahrer das Ziel erreichen?	$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ Für den ersten Platz kommen alle sechs Fahrer in Frage. Ist der erste Fahrer angekommen, können nur noch fünf Fahrer um den zweiten Platz konkurrieren usw. Damit gibt es 720 verschiedene Ranglisten für den Zieleinlauf.
63 In einer Tüte sind 12 rote, 18 grüne und 20 gelbe Gummibärchen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Jana zufällig ein rotes (grünes) Gummibärchen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie ein rotes ***oder*** grünes Gummibärchen?	Wahrscheinlichkeit für ein rotes Gummibärchen: $\frac{12}{50}=0{,}24=\mathbf{24\,\%}$ grünes Gummibärchen: $\frac{18}{50}=0{,}36=\mathbf{36\,\%}$ rote ***oder*** grüne Gummibärchen: $\frac{12}{50}+\frac{18}{50}=0{,}24+0{,}36=\mathbf{60\,\%}$ (***Summenregel***)
64 Ziehen ohne Zurücklegen In einer Tüte sind 12 rote, 18 grüne und 20 gelbe Gummibärchen. Jana zieht zwei Gummibärchen hintereinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie zuerst ein rotes und dann ein grünes?	Ziehen ohne Zurücklegen Wahrscheinlichkeit für zuerst ein rotes und dann ein grünes Gummibärchen: $\frac{12}{50}\cdot\frac{18}{49}\approx0{,}088=8{,}8\,\%$

65
Ziehen mit Zurücklegen

In einer Tüte sind 12 rote, 18 grüne und 20 gelbe Gummibärchen.
Jana zieht zwei Gummibärchen hintereinander.

Jana mag die gelben Gummibärchen nicht und schmeißt diese immer zurück in die Tüte.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie dreimal hintereinander ein gelbes Gummibärchen?

Ziehen mit Zurücklegen

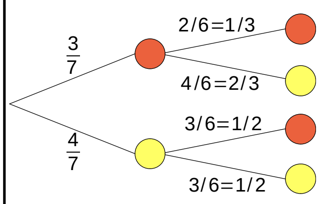
Wahrscheinlichkeit für dreimal hintereinander ein gelbes Gummibärchen:

$$\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}=\left(\frac{20}{50}\right)^3=0{,}064=6{,}4\,\%$$

66

In einer Urne liegen 3 rote und 4 gelbe Kugeln. Maren entnimmt der Urne zuerst eine Kugel und legt sie vor sich hin. Dann zieht sie noch eine weitere Kugel. Gib eine ***Ergebnismenge*** zu diesem Zufallsexperiment an und bestimme die ***Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse***.

Ergebnismenge: $S=\{r\,r\,;\,r\,g\,;\,g\,r\,;\,g\,g\}$



$P(rr)=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}=14{,}3\%$

$P(rg)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{7}=28{,}6\%$

$P(gr)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}=28{,}6\%$

$P(rg)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}=28{,}6\%$

(***Pfadregel***)

67
Vierfeldertafel

In einer Schule mit 600 Schülern spielen 120 ein Musikinstrument, 72 von ihnen sind Mädchen. Nur 144 Mädchen spielen kein Musikinstrument.

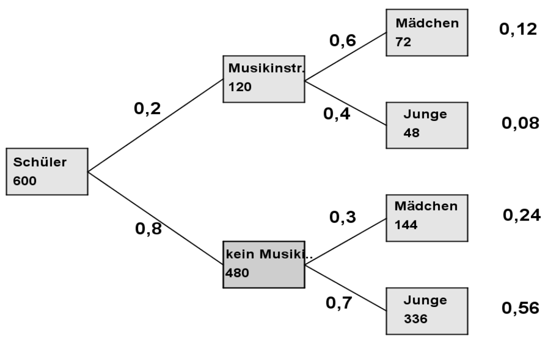
Erstelle anhand der gegebenen Daten eine Vierfeldertafel.

	Mädchen	Junge	gesamt
Spielt ein Musikinstr.	72	48	120
Spielt kein Musikinstr.	144	336	480
gesamt	216	384	600

68
Baumdiagramm

In einer Schule mit 600 Schülern spielen 120 ein Musikinstrument, 72 von ihnen sind Mädchen. Nur 144 Mädchen spielen kein Musikinstrument.

Erstelle anhand der gegebenen Daten ein Baumdiagramm.



69 bedingte Wahrscheinlichkeit *Diese Daten sollen als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.* Mit welcher Wahrscheinlichkeit wählt man unter den Musikinstrument spielenden Schülern zufällig ein Mädchen aus?	Anhand des obigen Baumdiagramms (J2) gilt für den obersten Pfad: $\frac{120}{600}=0{,}2$ und $\frac{72}{600}=0{,}12$ Deswegen gilt auch $p=\frac{0{,}12}{0{,}2}=\frac{72}{120}=0{,}6$. Die Wahrscheinlichkeit unter den Musikinstrument spielenden Schülern zufällig ein Mädchen auszuwählen ist 60%.
70 Wahrscheinlichkeiten Bestimme die Wahrscheinlichkeit p für das zufällige Auswählen eines... a) … Jungen, der kein Musikinstrument spielt. b) … Mädchens mit Musikinstrument nur innerhalb der Gruppe der Mädchen.	a) Die Wahrscheinlichkeit p für einen „Jungen und kein Musikinstrument“ ist 0,56. („Und“-Wahrscheinlichkeit. abzulesen im Baumdiagramm rechts vom letzten Kästchen.) b) p(Mädchen) $=0{,}12+0{,}24=0{,}36$ p(„mit Musikinstrument innerhalb der Gruppe der Mädchen“): $\frac{0{,}12}{0{,}36}=\frac{1}{3}$ (1/3 aller Mädchen spielen ein Instr.)
71 Mit einem Würfel wird zweimal gewürfelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mindestens eine Sechs? Rechne mit Hilfe des ***Gegenereignisses***.	***Ereignis*** A: Mindestens eine 6. ***Gegenereignis*** $\overline{A}$: keine 6. $P(\overline{A})=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$ $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{11}{36}\approx 30{,}6\%$
72 Gegenereignis Bestimme die Wahrscheinlichkeit p (Angabe in Prozent), dass bei einem Elfmeterschießen beim Fußball (insgesamt 5 Schüsse) mindestens einer der fünf Schüsse nicht zu einem Treffer führt, wenn ein Schütze mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,75 bei einem Elfmeter einen Treffer erzielt.	Die Wahrscheinlichkeit p_1 bei fünf Elfmetern in Folge jeweils einen Treffer zu erzielen, liegt bei $p_1=0{,}75^5\approx 0{,}237$. Die Wahrscheinlichkeit p, dass bei fünf Elfmetern mindestens ein Schuss zu keinem Treffer wird, ist dann die Gegenwahrscheinlichkeit. $p=1-p_1\approx 1-0{,}273=0{,}727=72{,}7\%$.

73 Erwartungswert Eine Basketballmannschaft hat eine Trefferquote bei einem 2-Punkte-Wurf von 55% und bei einem 3-Punkte-Wurf von 25%. Bestimme die durchschnittliche Punktezahl der Mannschaft pro Wurf.	Erwartungswert für die Punkte pro Wurf: $0{,}55 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 3 = 1{,}85$ Pro Wurf werden durchschnittlich 1,85 Punkte erzielt.

74 Bei einem Glücksspiel mit 1€ Einsatz wirft man zwei Würfel. Bei einer Sechs erhält man 2€. Zeigen beide Würfel eine Sechs, erhält man 10€. Die Zufalls-variable X gibt den Gewinn in € an. a) Erstelle die Wahrsch.-Verteilung für X. b) Welchen durchschnittlichen Gewinn kann man auf lange Sicht erwarten?	a) X kann die Werte -1, 1 und 9 annehmen. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten erhält man z. B. mit einem Baumdiagramm. g: -1 | 1 | 9 $P(X=g)$: $\frac{25}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{1}{36}$ b) $E(X) = -1 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 9 \cdot \frac{1}{36} = -0{,}17$ Man verliert auf lange Sicht durchschnittlich 0,17 € pro Spiel

g	-1	1	9
$P(X=g)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

75 Internethinweise 1 bildungsserver.hamburg.de/mint/ MINT-Referat Hamburg, Beispielaufgaben und Abschlussarbeiten früherer Jahre www.schule-bw.de/unterricht/mathematik/3material/sek1/	Internethinweise 2 ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/ www.strobl-f.de/ nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/
